Cahier de calcul

- Pratique et entraînement avant l'entrée en **prépa B/L**

Présentation et mode d'emploi

En sciences, la technique et le calcul sont fondamentaux. L'expérience prouve que les étudiants arrivant en CPGE manquent souvent d'aisance en calcul, ce qui les pénalise parfois durablement. Le rythme de travail en CPGE est intense et vous manquerez l'an prochain de temps pour vous entraîner et combler certaines lacunes.

Pour être à l'aise l'année prochaine, vous devez donc pendant les vacances pratiquer et vérifier vos acquis à l'aide de ce cahier de calcul.

Ce cahier comporte :

- Un sommaire. Sont entourés les chapitres que vous pouvez traiter avant la rentrée de septembre. Le cahier complet vous sera donné durant votre première année de CPGE.
- Les énoncés. Le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une, deux, trois ou quatre horloges.
- Enfin, les réponses et un corrigé détaillé.

Ce cahier est donc prévu pour être utilisé en autonomie.

Ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : mélangez les thèmes en faisant par exemple deux exercices par jour sur des sujets différents.

Profitez-en pour revoir régulièrement les formules du cours correspondant.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : un peu chaque jour plutôt que plusieurs heures consécutives.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par soi-même avant de les regarder.

Identifiez les difficultés que vous pourriez rencontrer pour que nous puissions répondre à vos questions à la rentrée. Puis vous serez évalués sur ces méthodes de calcul durant la première quinzaine de cours.

Bonnes vacances et à bientôt !

Les professeurs de Mathématiques

Ce cahier de calcul est extrait d'un travail réalisé initialement pour l'ensemble des classes préparatoires.

Coordination

Colas Bardavid

Équipe des participants

Vincent Bayle, Romain Basson, Olivier Bertrand, Ménard Bourgade, Julien Bureaux,
Alain Camanes, Mathieu Charlot, Mathilde Colin de Verdière, Keven Commault, Miguel Concy,
Rémy Eupherte, Hélène Gros, Audrey Hechner, Florian Hechner, Marie Hézard, Nicolas Laillet,
Valérie Le Blanc, Thierry Limoges, Quang-Thai Ngo, Xavier Pellegrin, Fabien Pellegrini,
Jean-Louis Pourtier, Valérie Robert, Jean-Pierre Técourt, Guillaume Tomasini, Marc Tenti

Pierre-Jean Aubry, Carine Courant, Elodie Maillet

Remerciements

Nous remercions vivement l'équipe coordonnée par Colas Bardavid pour avoir mis à disposition les sources du cahier initial.

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).

L'illustration de la couverture vient de
https ://www.freeimg.net/photo/512455/fibonacci-geometry-mathematics-nautilus

Sommaire

Énoncés

Fiche de calcul n° 1

Fractions

Prérequis
Règles de calcul sur les fractions.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.

Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel non nul).

a) $\dfrac{32}{40}$ ....

b) $8^3 \times \dfrac{1}{4^2}$ ....

c) $\dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$ ....

d) $\dfrac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$ ....

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{3}$ ....

b) $\dfrac{2}{3} - 0{,}2$ ....

c) $\dfrac{36}{25} \times \dfrac{15}{12} \times 5$ ....

d) $-\dfrac{2}{15} \div (-\dfrac{6}{5})$ ....

Calcul 1.3

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7})$ ....

b) $\left(\dfrac{136}{15} - \dfrac{28}{5} + \dfrac{62}{10}\right) \times \dfrac{21}{24}$ ....

c) $\dfrac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$ ....

d) $\dfrac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979}$ ....

Calcul 1.4 — Des nombres décimaux et des fractions.

Dans chaque cas, donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

a) $0{,}2$ ....

b) $0{,}36$ ....

c) $1{,}35$ ....

d) $1{,}5 + \dfrac{2}{3}$ ....

e) $\dfrac{1}{3} - 0{,}3$ ....

f) $\dfrac{13{,}5}{18{,}2 - 3{,}2}$ ....

Calcul 1.5 — Un petit calcul.

Écrire $\dfrac{0{,}5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \dfrac{0{,}5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0{,}2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3{,}5}$ sous forme d'une fraction irréductible. ....

Fiche de calcul n° 2

Puissances

Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Calcul 2.1

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$ ....

b) $(10^5)^3$ ....

c) $\dfrac{10^5}{10^3}$ ....

d) $\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}}$ ....

e) $\dfrac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$ ....

f) $\dfrac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$ ......

Calcul 2.2 — Des nombres décimaux.

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $0{,}001$ ....

b) $10^3 \cdot 0{,}01^3$ ....

c) $\dfrac{0{,}01^2}{0{,}1^5}$ ....

d) $0{,}001^{-2} \cdot 1000^2$ ....

e) $\dfrac{1000 \cdot 0{,}01^3}{0{,}1^3 \cdot 0{,}01^2}$ ......

f) $\dfrac{\left(0{,}01^3\right)^{-2}}{0{,}1^{-3} \cdot \left(100^{-2}\right)^{-3}}$.

Calcul 2.3

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$ ....

b) $(5^3)^{-2}$ ....

c) $\dfrac{2^5}{2^{-2}}$ ....

d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$ ....

e) $\dfrac{6^5}{2^5}$ ....

f) $\dfrac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$ ....

Calcul 2.4

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ ....

b) $2^{21} + 2^{22}$ ....

c) $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$ ....

d) $\dfrac{\left(3^2 \cdot (-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 \cdot 2^3\right)^{-2}}$ ....

Calcul 2.5

Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\dfrac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$ ....

b) $\dfrac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$ ....

c) $\dfrac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$ ....

d) $\dfrac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$ ....

Fiche de calcul n° 3

Calcul littéral

Prérequis
Les identités remarquables.

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.

a) $\left(2x - \dfrac{1}{2}\right)^3$ ....

b) $(x-1)^3\big(x^2+x+1\big)$ ....

c) $(x+1)^2(x-1)\big(x^2-x+1\big)$ ....

d) $(x+1)^2(x-1)\big(x^2+x+1\big)$ ....

e) $(x-1)^2(x+1)\big(x^2+x+1\big)$ ....

f) $\big(x^2+x+1\big)\big(x^2-x+1\big)$ ....

Calcul 3.2

Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x.

a) $(x-2)^2\big(-x^2+3x-1\big)-(2x-1)(x^3+2)$ ....

b) $(2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1)$ ....

c) $\Big((x+1)^2(x-1)\big(x^2-x+1\big)+1\Big)x - x^6 - x^5 + 2$ ....

d) $(x+1)(x-1)^2 - 2\big(x^2+x+1\big)$ ....

e) $\Big(x^2+\sqrt{2}x+1\Big)\Big(1-\sqrt{2}x+x^2\Big)$ ....

f) $\big(x^2+x+1\big)^2$ ....

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.

Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

a) $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$ ....

b) $25-(10x+3)^2$ ....

c) $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$ ....

d) $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$ ....

Fiche de calcul n° 4

Racines carrées

Prérequis
Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt{(-5)^2}$ ....

b) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$ ....

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ ....

d) $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$ ....

e) $\sqrt{(3-\pi)^2}$ ....

f) $\sqrt{(3-a)^2}$ ....

Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.

Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$ ....

b) $(2+\sqrt{5})^2$ ....

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ ....

d) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ ....

e) $(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2$ ....

f) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$ ....

g) $\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$ ....

h) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ .....

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3

Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

a) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ....

c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ....

d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ....

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

f) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ ....

g) $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

h) $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$ ....

Fiche de calcul n° 7

Exponentielle et Logarithme

Prérequis
Exponentielle, logarithme.

Logarithmes

Calcul 7.1

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$.

a) $\ln(16)$ ....

b) $\ln(512)$ ....

c) $\ln(0{,}125)$ ....

d) $\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1}{8}\right)$ ....

e) $\ln(72) - 2\ln(3)$ ....

f) $\ln(36)$ ....

Calcul 7.2

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$.

a) $\ln\left(\dfrac{1}{12}\right)$ ....

b) $\ln(2{,}25)$ ....

c) $\ln(21) + 2\ln(14) - 3\ln(0{,}875)$ ..

d) $\ln(500)$ ....

e) $\ln\left(\dfrac{16}{25}\right)$ ....

f) $\ln(6{,}25)$ ....

Calcul 7.3

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$.

$\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\dfrac{98}{99}\right) + \ln\left(\dfrac{99}{100}\right)$ ....

Exponentielles

Calcul 7.4

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $e^{3\ln(2)}$ ....

b) $\ln(\sqrt{e})$ ....

c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$ ....

d) $e^{-2\ln(3)}$ ....

e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$ ....

f) $e^{\ln(3)-\ln(2)}$ ....

Fiche de calcul n° 8

Trigonométrie

Prérequis
Cercle trigonométrique. Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Symétrie et périodicité de sin et cos. Fonction tangente.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.1

Donner les valeurs :

a) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ ......

e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ ....

d) $\cos(7\pi)$ ....

f) $\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$ ......

Calcul 8.2

Simplifier :

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)+\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$

d) $\cos^2\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$ ....

b) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$ ....

e) $\cos^2\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)-\sin^2\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$ ....

Équations trigonométriques

Calcul 8.7

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, dans $[-\pi, \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ ....

b) $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .....

c) $\sin(x) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Fiche de calcul n° 10

Dérivation

Prérequis

Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Application des formules usuelles

Calcul 10.1 — Avec des produits.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6)\exp(2x)$. ....

d) $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x)\ln(x - 2)$ ....

Calcul 10.2 — Avec des puissances.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2\cos(x))^2$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3\cos(x) - \sin(x))^3$. ....

Calcul 10.3 — Avec des fonctions composées.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. ....

b) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x)\exp(x^2 + x)$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3\sin(2x))$. ....

e) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$. ....

f) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$. ....

Calcul 10.4 — Avec des quotients.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{2\sin(x) + 3}$. ....

b) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3x + 2}$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{\cos(2x + 1)}{x^2 + 1}$. ....

d) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{\ln(x)}$. ....

Fiche de calcul n° 12

Calcul d'intégrales

Prérequis
Primitives usuelles, composées simples.

Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont dans le sens croissant.

Calcul d'intégrales

On rappelle que si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, que l'on note $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Calcul 12.3 — Polynômes.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} 2\,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{1}^{3} (2x-5)\,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{-2}^{0} (x^2+x+1)\,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (3x^5-5x^3)\,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} (x^5-x^4)\,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{1}^{-1} x^{100}\,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 12.4 — Fonctions usuelles.

Calculer.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ ..

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(x)\,\mathrm{d}x$ ..

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ ....

d) $\displaystyle\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ ...

e) $\displaystyle\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ ......

f) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ ....

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Fractions

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

1.1 b) .... $\boxed{2^5}$

1.1 c) .... $\boxed{3}$

1.1 d) .... $\boxed{-2 \times 3^{3k-2}}$

1.2 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

1.2 b) .... $\boxed{\dfrac{7}{15}}$

1.2 c) .... $\boxed{9}$

1.2 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{9}}$

1.3 a) .... $\boxed{247}$

1.3 b) .... $\boxed{\dfrac{203}{24}}$

1.3 c) .... $\boxed{\dfrac{-10}{3}}$

1.3 d) .... $\boxed{1\ 000}$

1.4 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{5}}$

1.4 b) .... $\boxed{\dfrac{9}{25}}$

1.4 c) .... $\boxed{\dfrac{27}{20}}$

1.4 d) .... $\boxed{\dfrac{13}{6}}$

1.4 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{30}}$

1.4 f) .... $\boxed{\dfrac{9}{10}}$

1.5 .... $\boxed{\dfrac{16}{35}}$

Corrigés

1.1 a) $\dfrac{32}{40} = \dfrac{8 \times 4}{8 \times 5} = \dfrac{4}{5}$

1.1 b) $8^3 \times \dfrac{1}{4^2} = (2 \times 4)^3 \times \dfrac{1}{4^2} = 2^3 \times 4^3 \times \dfrac{1}{4^2} = 2^3 \times 4 = 2^5$

1.1 c) $\dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} = \dfrac{(3^3)^{-1} \times (2^2)^2}{3^{-4} \times 2^4} = \dfrac{3^4}{3^3} = 3$

1.1 d) On a : $\dfrac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}} = \dfrac{(-2) \times (-2)^{2k} \times 3^{2k} \times 3^{-1}}{4^k \times 3^{-k} \times 3} = \dfrac{(-2) \times 4^k \times 3^{2k} \times 3^k}{4^k \times 3^2} = -2 \times 3^{3k-2}$.

1.2 a) On met au même dénominateur : $\dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2 \times 3}{4 \times 3} - \dfrac{1 \times 4}{3 \times 4} = \dfrac{6}{12} - \dfrac{4}{12} = \dfrac{6-4}{12} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

1.2 b) On transforme 0,2 en fraction et on met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3} - 0{,}2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{10} = \frac{2 \times 10}{3 \times 10} - \frac{2 \times 3}{10 \times 3} = \frac{20}{30} - \frac{6}{30} = \frac{20-6}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7 \times 2}{15 \times 2} = \frac{7}{15}.$$

1.2 c) Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5 = \frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times \frac{5}{1} = \frac{36 \times 15 \times 5}{25 \times 12 \times 1} = \frac{12 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5}{5 \times 5 \times 12 \times 1} = \frac{3 \times 3}{1} = \frac{9}{1} = 9.$$

1.2 d) Pour diviser une fraction par une autre, on la multiplie par la fraction inverse de la deuxième fraction :

$$-\frac{2}{15} \div (-\frac{6}{5}) = -\frac{2}{15} \times (-\frac{5}{6}) = \frac{2}{15} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{15 \times 6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5 \times 2 \times 3} = \frac{1}{9}.$$

1.3 a) On développe :

$$\begin{aligned}(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}) &= \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{2} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{3} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{5} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{7} \\ &= 3 \times 5 \times 7 + 2 \times 5 \times 7 + 2 \times 3 \times 7 + 2 \times 3 \times 5 = 105 + 70 + 42 + 30 = 247.\end{aligned}$$

1.3 b) On simplifie d'abord, puis on applique les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}\right) \times \frac{21}{24} &= \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{31}{5}\right) \times \frac{7}{8} \\ &= \left(\frac{136}{15} + \frac{3}{5}\right) \times \frac{7}{8} = \left(\frac{136}{15} + \frac{9}{15}\right) \times \frac{7}{8} = \frac{145}{15} \times \frac{7}{8} = \frac{29}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{203}{24}.\end{aligned}$$

1.3 c) On simplifie d'abord les termes comportant des exposants :

$$\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3} = \frac{5^{10} \times 7^3 - 5^{10} \times 7^4}{5^9 \times 7^3 + 5^9 \times 7^3 \times 2^3} = \frac{5^{10} \times 7^3(1-7)}{5^9 \times 7^3(1+2^3)} = \frac{5 \times (-6)}{9} = \frac{-10}{3}.$$

1.3 d) On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1\,958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979} &= \frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,979 \times 21 + 21 + 1\,958}{1\,979 \times (1\,980 - 1\,978)} \\ &= \frac{1\,979 \times (1\,978 + 21) + 1\,979}{1\,979 \times 2} = \frac{1\,979 \times (1\,978 + 21 + 1)}{1\,979 \times 2} = \frac{1\,979 \times 2\,000}{1\,979 \times 2} \\ &= 1\,000.\end{aligned}$$

1.5 On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{0{,}5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0{,}5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0{,}2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3{,}5} &= \frac{\frac{3}{6} - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - \frac{7}{2}} \\ &= \frac{3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37}\right)}{5\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37}\right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{-7\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)} = \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35}.\end{aligned}$$

Fiche n° 2. Puissances

Réponses

2.1 a) .... $\boxed{10^8}$

2.1 b) .... $\boxed{10^{15}}$

2.1 c) .... $\boxed{10^2}$

2.1 d) .... $\boxed{10^{-2}}$

2.1 e) .... $\boxed{10^4}$

2.1 f) .... $\boxed{10^{-8}}$

2.2 a) .... $\boxed{10^{-3}}$

2.2 b) .... $\boxed{10^{-3}}$

2.2 c) .... $\boxed{10}$

2.2 d) .... $\boxed{10^{12}}$

2.2 e) .... $\boxed{10^4}$

2.2 f) .... $\boxed{10^{-3}}$

2.3 a) .... $\boxed{15^4}$

2.3 b) .... $\boxed{5^{-6}}$

2.3 c) .... $\boxed{2^7}$

2.3 d) .... $\boxed{(-7)^{-2}}$

2.3 e) .... $\boxed{3^5}$

2.3 f) .... $\boxed{3^{28}}$

2.4 a) .... $\boxed{2^{-4}\cdot 3^{-1}}$

2.4 b) .... $\boxed{2^{21}\cdot 3}$

2.4 c) .... $\boxed{2}$

2.4 d) .... $\boxed{2^{38}\cdot 3^{26}}$

2.5 a) .... $\boxed{8}$

2.5 b) .... $\boxed{11}$

2.5 c) .... $\boxed{3^{10}}$

2.5 d) .... $\boxed{2^6\cdot 5}$

Corrigés

2.2 b) $10^3\cdot 0{,}01^3 = 10^3\cdot\left(10^{-2}\right)^3 = 10^3\cdot 10^{-6} = 10^{-3}$

2.2 c) $\dfrac{0{,}01^2}{0{,}1^5} = \dfrac{10^{-4}}{10^{-5}} = 10^1$

2.2 d) $0{,}001^{-2}\cdot 1000^2 = \left(10^{-3}\right)^{-2}\cdot 10^6 = 10^{12}$

2.2 e) $\dfrac{1000\cdot 0{,}01^3}{0{,}1^3\cdot 0{,}01^2} = \dfrac{10^3\cdot 10^{-6}}{10^{-3}\cdot 10^{-4}} = 10^{-3}\cdot 10^7 = 10^4$

2.2 f) $\dfrac{\left(0{,}01^3\right)^{-2}}{0{,}1^{-3}\cdot(100^{-2})^{-3}} = \dfrac{\left(10^{-6}\right)^{-2}}{10^3\cdot(10^{-4})^{-3}} = \dfrac{1}{10^3} = 10^{-3}$

2.4 a) $\dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 6^{-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 2^{-1}\cdot 3^{-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^{4-1}\cdot 2^{8-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^3\cdot 2^7} = 2^{3-7}\cdot 3^{2-3} = 2^{-4}\cdot 3^{-1}.$

2.4 b) On factorise : $2^{21}+2^{22} = 2^{21}+2^{21}\cdot 2 = 2^{21}\cdot(1+2) = 2^{21}\cdot 3.$

2.4 c) On factorise au numérateur et au dénominateur : $\dfrac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}} = \dfrac{(3+1)\cdot 3^{21}}{(3-1)\cdot 3^{21}} = \dfrac{4}{2} = 2.$

2.4 d) On simplifie en appliquant les règles habituelles de calcul avec les puissances, et en exploitant le fait que $(-a)^n = a^n$ lorsque n est pair : $\dfrac{\left(3^2\cdot(-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5\cdot 2^3\right)^{-2}} = \dfrac{3^{16}\cdot 2^{32}}{3^{-10}\cdot 2^{-6}} = 2^{38}\cdot 3^{26}.$

2.5 a) On fait apparaitre les facteurs premiers 2 et 3 : $\dfrac{8^{17}\cdot 6^{-6}}{9^{-3}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{3\cdot 17}\cdot 2^{-6}\cdot 3^{-6}}{3^{2\cdot(-3)}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{51-6}\cdot 3^{-6}}{3^{-6}\cdot 2^{42}} = 2^{45-42} = 2^3 = 8.$

2.5 b) Avec les facteurs premiers 5 et 11 : $\dfrac{55^2\cdot 121^{-2}\cdot 125^2}{275\cdot 605^{-2}\cdot 25^4} = \dfrac{(5\cdot 11)^2\cdot(11^2)^{-2}\cdot(5^3)^2}{5^2\cdot 11\cdot(11^2\cdot 5)^{-2}\cdot(5^2)^4} = \dfrac{5^8\cdot 11^{-2}}{5^8\cdot 11^{-3}} = 11.$

2.5 c) On fait apparaitre les facteurs premiers 2, 3 et 5 : $\dfrac{12^{-2}\cdot 15^4}{25^2\cdot 18^{-4}} = \dfrac{(2^2)^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 3^4\cdot 5^4}{(5^2)^2\cdot 2^{-4}\cdot(3^2)^{-4}} = \dfrac{2^{-4}\cdot 3^2\cdot 5^4}{2^{-4}\cdot 3^{-8}\cdot 5^4} = 3^{10}.$

2.5 d) Même méthode que précédemment : $\dfrac{36^3\cdot 70^5\cdot 10^2}{14^3\cdot 28^2\cdot 15^6} = \dfrac{2^6\cdot 3^6\cdot 2^5\cdot 5^5\cdot 7^5\cdot 2^2\cdot 5^2}{2^3\cdot 7^3\cdot 2^4\cdot 7^2\cdot 3^6\cdot 5^6} = \dfrac{2^{13}\cdot 3^6\cdot 5^7\cdot 7^5}{2^7\cdot 3^6\cdot 5^6\cdot 7^5} = 2^6\cdot 5.$

Fiche n° 3. Calcul littéral

Réponses

3.1 a) .... $\boxed{8x^3 - 6x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{8}}$

3.1 b) .... $\boxed{x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1}$

3.1 c) .... $\boxed{x^5 - x^3 + x^2 - 1}$

3.1 d) .... $\boxed{x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1}$

3.1 e) .... $\boxed{x^5 - x^3 - x^2 + 1}$

3.1 f) .... $\boxed{x^4 + x^2 + 1}$

3.2 a) .... $\boxed{-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4}$

3.2 b) .... $\boxed{-28 + 21x}$

3.2 c) .... $\boxed{2 + x^3 - x^4 - x^5}$

3.2 d) .... $\boxed{-1 - 3x - 3x^2 + x^3}$

3.2 e) .... $\boxed{1 + x^4}$

3.2 f) .... $\boxed{1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4}$

3.3 a) .... $\boxed{-6(6x + 7)}$

3.3 b) .... $\boxed{4(5x + 4)(-5x + 1)}$

3.3 c) .... $\boxed{2(3x - 4)(10x + 3)}$

3.3 d) .... $\boxed{-8(x + 1)(x + 16)}$

Corrigés

3.1 a) On utilise directement l'identité remarquable $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

....

3.1 b) On peut écrire : $(x - 1)^3\big(x^2 + x + 1\big) = \big(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\big)\big(x^2 + x + 1\big) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$. Pour être "efficace", il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p) = abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3) \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 1 = -1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

....

3.1 c) Connaissant les identités remarquables $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ et $(x+1)\big(x^2 - x + 1\big) = x^3 + 1$, on a facilement :

$$(x + 1)^2(x - 1)\big(x^2 - x + 1\big) = [(x + 1)(x - 1)]\big[(x + 1)\big(x^2 - x + 1\big)\big] = \big(x^2 - 1\big)\big(x^3 + 1\big) = x^5 - x^3 + x^2 - 1.$$

Que pensez-vous de la nécessité d'écrire les étapes intermédiaires ?

....

3.1 d) On calcule : $(x+1)^2(x-1)\big(x^2+x+1\big) = \big(x^2+2x+1\big)\big(x^3-1\big) = x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$.

3.1 e) On calcule : $(x-1)^2(x+1)\big(x^2+x+1\big) = \big(x^2-1\big)\big(x^3-1\big) = x^5-x^3-x^2+1$.

3.3 a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors

$$-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49 = -(6x+7)(6x-1)+(6x)^2-7^2 = (6x+7)[-(6x-1)+6x-7] = -6(6x+7)$$

.

3.3 b) On calcule $25-(10x+3)^2 = 5^2-(10x+3)^2 = (10x+8)(-10x+2) = 4(5x+4)(-5x+1)$.

Fiche n° 4. Racines carrées

Réponses

4.1 a) .... $\boxed{5}$

4.1 b) .... $\boxed{\sqrt{3}-1}$

4.1 c) .... $\boxed{-\sqrt{3}+2}$

4.1 d) .... $\boxed{\sqrt{7}-2}$

4.1 e) .... $\boxed{\pi-3}$

4.1 f) .... $\boxed{|3-a|}$

4.2 a) .... $\boxed{20}$

4.2 b) .... $\boxed{9+4\sqrt{5}}$

4.2 c) .... $\boxed{1+\sqrt{3}}$

4.2 d) .... $\boxed{3+\sqrt{2}}$

4.2 e) .... $\boxed{12\sqrt{7}}$

4.2 f) .... $\boxed{12}$

4.2 g) .... $\boxed{9-\dfrac{10}{3}\sqrt{2}}$

4.2 h) .... $\boxed{10}$

4.3 a) .... $\boxed{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}}$

4.3 b) .... $\boxed{3-2\sqrt{2}}$

4.3 c) .... $\boxed{1-\sqrt{10}+\sqrt{15}}$

4.3 d) .... $\boxed{\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2}$

4.3 e) .... $\boxed{-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

4.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}}$

4.3 g) .... $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.3 h) .... $\boxed{50-25\sqrt{3}}$

Corrigés

4.1 a) Quand a est un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a donc $\sqrt{(-5^2)}=5$.

....

4.1 f) On trouve $|3-a|$, c'est-à-dire $3-a$ si $a \leqslant 3$ et $a-3$ si $a \geqslant 3$.

....

4.2 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=1+\sqrt{3}.$$

....

4.3 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\\ &= \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{2^2-2}=\frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}\\ &= 2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}.\end{aligned}$$

....

Fiche n° 7. Exponentielle et Logarithme

Réponses

7.1 a) .... $\boxed{4\ln(2)}$

7.1 b) .... $\boxed{9\ln(2)}$

7.1 c) .... $\boxed{-3\ln(2)}$

7.1 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(2)}$

7.1 e) .... $\boxed{3\ln(2)}$

7.1 f) .... $\boxed{2\ln(2)+2\ln(3)}$

7.2 a) .... $\boxed{-\ln(3)-2\ln(2)}$

7.2 b) .... $\boxed{2\ln(3)-2\ln(2)}$

7.2 c) .... $\boxed{\ln(3)+11\ln(2)}$

7.2 d) .... $\boxed{3\ln(5)+2\ln(2)}$

7.2 e) .... $\boxed{-2\ln(5)+4\ln(2)}$

7.2 f) .... $\boxed{2\ln(5)-2\ln(2)}$

7.3 .... $\boxed{-2\ln(2)-2\ln(5)}$

7.4 a) .... $\boxed{8}$

7.4 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

7.4 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

7.4 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{9}}$

7.4 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

7.4 f) .... $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

Corrigés

7.1 a) On a $16 = 4^2 = 2^4$ donc $\ln(16) = 4\ln(2)$.

....

7.1 c) On a $0{,}125 = \dfrac{1}{8}$ donc $\ln 0{,}125 = -\ln 8 = -3\ln 2$.

....

7.1 e) On a $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ donc $\ln(72) - 2\ln(3) = (3\ln(2) + 2\ln(3)) - 2\ln(3) = 3\ln(2)$.

....

7.2 c) On a $0{,}875 = \dfrac{7}{8}$ donc

$$\begin{aligned}\ln(21) + 2\ln(14) - 3\ln(0{,}875) &= (\ln(3) + \ln(7)) + 2(\ln(2) + \ln(7)) - 3(\ln(7) - \ln(8)) \\ &= \ln(3) + 2\ln(3) + 3 \times 3\ln(2) = 3\ln(3) + 11\ln(2).\end{aligned}$$

....

7.3 On appelle A ce nombre. On a

$$A = (\ln(1) - \ln(2)) + (\ln(2) - \ln(3)) + \cdots + (\ln(98) - \ln(99)) + (\ln(99) - \ln(100))$$

donc en simplifiant les termes deux par deux finalement il reste $A = \ln 1 - \ln 100$, c'est-à-dire $A = -\ln 100$ où $100 = 2^2 \times 5^2$, d'où le résultat $A = -2(\ln 2 + \ln 5)$

Fiche n° 8. Trigonométrie

Réponses

8.1 a) .... $\boxed{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

8.1 d) .... $\boxed{-1}$

8.1 e) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

8.1 f) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

8.2 a) .... $\boxed{0}$

8.2 b) .... $\boxed{0}$

8.2 d) .... $\boxed{1}$

8.2 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

8.7 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

8.7 a) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right\}}$

8.7 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}}$

8.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

8.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{-2\pi}{3}, \dfrac{-\pi}{3}\right\}}$

8.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}}$

8.7 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}}$

8.7 c) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}\right\}}$

8.7 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}}$

Fiche n° 10. Dérivation

Réponses

10.1 a) .... $\boxed{6x^2 + 2x - 11}$

10.1 b) .... $\boxed{5x^4 - 6x^2 + 4x - 15}$

10.1 c) .... $\boxed{(2x^2 - 2x + 10)\exp(2x)}$

10.1 d) .... $\boxed{(6x-1)\ln(x-2) + \dfrac{3x^2 - x}{x-2}}$

10.2 a) .... $\boxed{5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)}$

10.2 b) .... $\boxed{4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)}$

10.2 c) .... $\boxed{8\cos^2(x) - 6\cos(x)\sin(x) - 4}$

10.2 d) .... $\boxed{-3(3\cos(x) - \sin(x))^2(3\sin(x) + \cos(x))}$

10.3 a) .... $\boxed{\dfrac{2x}{x^2+1}}$

10.3 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{x\ln(x)}}$

10.3 c) .... $\boxed{(-2x^2 + 3x - 1)\exp(x^2 + x)}$

10.3 d) .... $\boxed{6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))}$

10.3 e) .... $\boxed{\dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}}$

10.3 f) .... $\boxed{\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}$

10.4 a) .... $\boxed{\dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3) - (x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}}$

10.4 b) .... $\boxed{\dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}}$

10.4 c) .... $\boxed{-2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1) + x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}}$

10.4 d) .... $\boxed{\dfrac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}}$

Corrigés

10.1 a) On calcule : $f'(x) = (2x+3)(2x-5) + (x^2 + 3x + 2) \times 2 = 6x^2 + 2x - 11$.

....

10.1 b) On calcule : $f'(x) = (3x^2+3)(x^2-5) + (x^3 + 3x + 2) \times 2x = 5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$.

....

10.1 c) On calcule : $f'(x) = (2x-2)\exp(2x) + (x^2 - 2x + 6) \times 2\exp(2x) = (2x^2 - 2x + 10)\exp(2x)$.

....

10.1 d) On calcule : $f'(x) = (6x-1)\ln(x-2) + (3x^2 - x) \times \dfrac{1}{x-2} = (6x-1)\ln(x-2) + \dfrac{3x^2-x}{x-2}$.

....

10.2 a) On calcule : $f'(x) = 5(x^2 - 5x)^4(2x-5)$.

....

10.2 b) On calcule : $f'(x) = 2(2x^3 + 4x - 1)(6x^2 + 4) = 4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)$.

10.2 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sin(x) + 2\cos(x))(\cos(x) - 2\sin(x)) = 2(\sin(x)\cos(x) - 2\sin^2(x) + 2\cos^2(x) - 4\cos(x)\sin(x) \\ &= -6\cos(x)\sin(x) - 4\sin^2(x) + 4\cos^2(x) = -6\cos(x)\sin(x) - 4(1 - \cos^2(x)) + 4\cos^2(x) \\ &= 8\cos^2(x) - 6\cos(x)\sin(x) - 4. \end{aligned}$$

10.2 d) On calcule : $f'(x) = 3(3\cos(x) - \sin(x))^2(-3\sin(x) - \cos(x)) = -3(3\cos(x) - \sin(x))^2(3\sin(x) + \cos(x))$.
En développant, on trouve : $f'(x) = -54\cos^2(x)\sin(x) - 78\cos^3(x) - 9\sin(x) + 51\cos(x)$.

10.3 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$. C'est une application directe de la formule de dérivation quand $f = \ln \circ u$.

10.3 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1/x}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

10.3 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\exp(x^2 + x) + (2 - x)\exp(x^2 + x) \times (2x + 1) = (-1 + (2 - x)(2x + 1))\exp(x^2 + x) \\ &= (-1 + 4x + 2 - 2x^2 - x)\exp(x^2 + x) = (-2x^2 + 3x - 1)\exp(x^2 + x). \end{aligned}$$

10.3 d) On calcule : $f'(x) = \exp(3\sin(2x))(3 \times 2\cos(2x)) = 6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$.

10.3 e) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin(x)}}\cos(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$.

10.3 f) On calcule : $f'(x) = \cos(\sqrt{x}) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

10.4 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(2x + 3)(2\sin(x) + 3) - (x^2 + 3x) \times 2\cos(x)}{(2\sin(x) + 3)^2}$. En développant le numérateur, on trouve

$$f'(x) = \frac{-2x^2\cos(x) + 4x\sin(x) - 6x\cos(x) + 6\sin(x) + 6x + 9}{(2\sin(x) + 3)^2}.$$

10.4 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x + 2) - \sqrt{x} \times 3}{(3x + 2)^2} = \dfrac{\frac{3x+2}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(3x + 2)^2} = \dfrac{3x + 2 - 6x}{2\sqrt{x}(3x + 2)^2} = \dfrac{2 - 3x}{2\sqrt{x}(3x + 2)^2}$

10.4 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-2\sin(2x + 1) \times (x^2 + 1) - \cos(2x + 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = -2\dfrac{(x^2 + 1)\sin(2x + 1) + x\cos(2x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$.

10.4 d) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(4x + 3)\ln(x) - (2x^2 + 3x)\dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{(4x + 3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$

Fiche n^{o} 12. Calcul d'intégrales

Réponses

12.3 a) .... $\boxed{8}$

12.3 b) .... $\boxed{-2}$

12.3 c) .... $\boxed{\dfrac{8}{3}}$

12.3 d) .... $\boxed{0}$

12.3 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{30}}$

12.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{2}{101}}$

12.4 a) .... $\boxed{0}$

12.4 b) .... $\boxed{1}$

12.4 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

12.4 d) .... $\boxed{18}$

12.4 e) ...... $\boxed{e^2 - e^{-3}}$

12.4 f) .... $\boxed{-\ln 3}$

Corrigés

12.3 a) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique d'un rectangle.

12.3 b) $\displaystyle\int_1^3 (2x-5)\,\mathrm{d}x = \Big[x^2-5x\Big]_1^3 = (3^2-15)-(1^2-5) = -2.$

12.3 c) $\displaystyle\int_{-2}^0 x^2+x+1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-2}^0 = 0-\left(\frac{1}{3}(-2)^3+\frac{1}{2}(-2)^2-2\right) = \frac{8}{3}.$

12.3 d) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

12.3 e) $\displaystyle\int_0^1 x^5-x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{6}-\frac{1}{5} = -\frac{1}{30}.$

12.3 f) $\displaystyle\int_1^{-1} x^{100}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{101}x^{101}\right]_1^{-1} = -\frac{2}{101}.$

12.4 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

12.4 b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,\mathrm{d}x = \Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$

12.4 c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}.$

12.4 d) $\displaystyle\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{100} = 18.$

12.4 e) $\displaystyle\int_{-3}^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x\Big]_{-3}^2 = \mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-3}.$

12.4 f) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{-3}^{-1} = -\ln 3.$